组合选择（一）

第8章

优化问题2.6

$$\max_{\theta_k} U_k(c_k)$$

$$s.t. c_{k,0} = e_{k,0} - S^T \theta_k$$

$$c_{k,1} = e_{k,1} + X\theta_k$$

$$c_0, c_1 \geq 0$$

$$k = 1, \cdots, K$$

优化问题8.1

$$\max_{\theta} \quad u_0(c_0)+\sum_{\omega}\pi_{\omega}u_1(c_{1\omega})$$

$$\text{s.t.} \quad c_0 = e_0 - S^T\theta$$

$$c_1 = e_1 + X\theta$$

$$c_0, c_1 \geq 0$$

最优消费与组合选择由解θ给出

8.1 解的存在性及其特征

定理 8.1 当且仅当证券市场，记作$\{X,S\}$，

不存在套利机会时（2.6）式有解。

- 如果存在套利机会，参与者可以随意增加消费，解不可能最优——必要条件
- 如果不存在套利机会，状态价格都为正，即每一消费的价格都为正。因资源有限，预算集有界，存在最优点——充分条件

定理8.1 证明

1。2.6有解，则参与者可各自优化，市场达到均衡

据定理4.2，均衡市场不存在套利机会

2。无套利。据定理4.7，存在严格为正的ϕ: $S=(\phi^T X)^T$

组合θ的消费为: $[-S^T\theta; X\theta]=[-\phi^T X\theta; X\theta]$

2.6的预算约束为：$c_0=e_0-\phi^T X\theta, c_1=e_1+X\theta$

进一步：$\phi^T c_1=\phi^T e_1+\phi^T X\theta$

于是：$c_0+\phi^T c_1=e_0+\phi^T e_1$，这是3.4中的预算约束

据定理3.1，优化问题3.4有解，故2.6有解

Euler方程（Euler equation）

$$\max_{\theta} u_0(e_0 - S^T\theta) + \sum_{\omega=1}^{\Omega} \pi_\omega u_1(e_{1\omega} + X_\omega \theta)$$

$$F.O.C$$

$$u_0'(c_0)S_n = \sum_{\omega=1}^{\Omega} \pi_\omega u_1'(c_{1\omega}) X_{\omega,n} = E[u_1'(\tilde{c}_1)\tilde{X}_n]$$

$$n = 1, \cdots, N$$

- 参与者在今天消费最后1元和把它用来投资以取得明天的消费之间是无差异的

Euler方程（续）

$$E\left[\frac{u_1'(\tilde{c}_1)}{u_0'(c_0)}\frac{\tilde{X}_n}{S_n}\right]=1, n=1,\cdots,N$$

- 对于每一只交易证券来说，投资对今天消费的相对边际效用全都等于1
- 一阶条件不能总是保证最优！

8.2 投资组合的选择

- 组合 θ 的价值，即0期的投资总额、或储蓄：

$$w \equiv e_0 - c_0 = S^T \theta$$

投资组合的选择（续）

给定投资总额，组合问题为：

$$v_1(w) \equiv \sum_{\omega} \pi_\omega u_1(e_{1\omega} + X_\omega \theta)$$

$$= \max_{\{\theta: S^T\theta = w\}} E[u_1(\tilde{e}_1 + \tilde{X}\theta)]$$

$\tilde{X}$是N只证券的随机收支行向量

v_1是财富w的间接效用函数

投资组合的选择（续）

- 假定1期的禀赋为0，则参与者的禀赋只包括当前消费和对交易证券的持有。此时，1期的组合选择问题简化为：

$$v_1(w) \equiv \max_{\left\{\theta : S^T\theta = w\right\}} E[u_1(\tilde{X}\theta)]$$

投资组合的选择（续）

记$a_n = \theta_n S_n$为证券n的投资额（元）

$$\text{gross rate of return}: \quad \tilde{x}_n \equiv \frac{\tilde{X}_n}{S_n}$$

$$\text{rate of return}: \quad \tilde{r}_n \equiv \frac{\tilde{X}_n - S_n}{S_n} = \tilde{x}_n - 1$$

投资组合的选择（续）

$$\tilde{w} \equiv \sum_{n=1}^{N} \theta_n \tilde{X}_n = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n = \sum_{n=1}^{N} a_n (1+\tilde{r}_n)$$

$$= w(1+r_F) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n (\tilde{r}_n - r_F)$$

$$w = \sum_{n=1}^{N} a_n$$

投资组合的选择（续）

- 最优组合问题变成：

$$\max_{a} E[u(\tilde{w})] = E[u(w(1+r_F) + \sum_{n=1}^{N-1} a_n(\tilde{r}_n - r_F))]$$

$$= E[u(w(1+r_F) + a^T(\tilde{r} - r_F\iota))]$$

投资组合的选择（续）

- 一阶条件为：

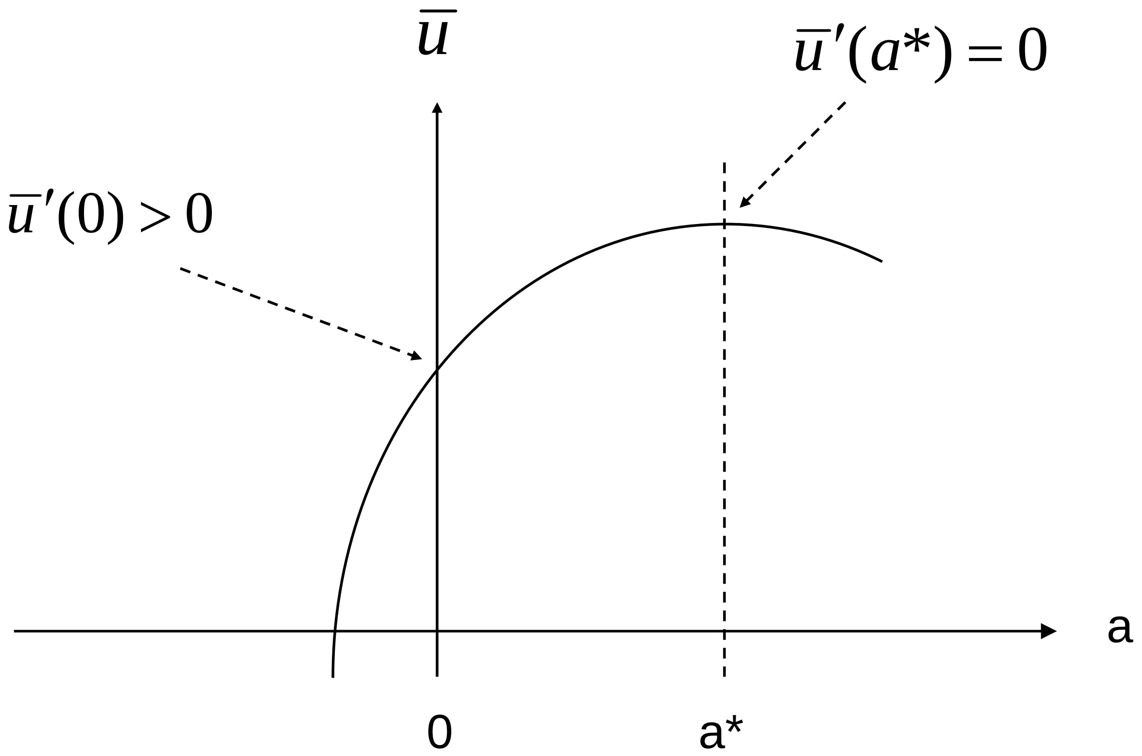
$$E[u'(\tilde{w})(\tilde{r}_i - r_F)] = 0, i = 1, \cdots, N-1$$

8.3 最优组合的性质

- 定理8.2 （单只风险证券）如果参与者是严格风险厌恶的，那么，

- a=0，当且仅当 $E[\tilde{r}] = r_F$
- a>0，当且仅当 $E[\tilde{r}] > r_F$
- a<0，当且仅当 $E[\tilde{r}] < r_F$

定理8.2 证明



最优组合的性质（续）

定理 8.3　$a'(w)=0$，当且仅当 $A'(w)=0$（CARA）

$a'(w)>0$，当且仅当 $A'(w)<0$（DARA）

$a'(w)<0$，当且仅当 $A'(w)>0$（IARA）

定理 8.4　$e=1$，当且仅当 $R'(w)=0$（CARA）

$e>1$，当且仅当 $R'(w)<0$（DARA）

$e<1$，当且仅当 $R'(w)>0$（IARA）

$$e(w)\equiv\frac{\frac{w}{dw}}{\frac{a}{da}}$$

定理8.3 证明

$u'(w) > 0$ $\qquad A(w) > 0, A'(w) < 0$

$a > 0$ $\qquad$ 一阶条件：$E[u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)] = 0$

设 $: \overline{w} = w(1 + r_F)$ $\qquad \tilde{w} = \overline{w} + a(\tilde{r} - r_F)$

$\tilde{r} > r_F: \quad \tilde{w} > \overline{w}, \quad A(\tilde{w}) < A(\overline{w})$

$$-A(\tilde{w})u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F) > -A(\overline{w})u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)$$

$\tilde{r} < r_F: \quad \tilde{w} < \overline{w}, \quad A(\tilde{w}) > A(\overline{w}),$

$$-A(\tilde{w})u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F) > -A(\overline{w})u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)$$

$$E[-A(\tilde{w})u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)] > -A(\overline{w})E[u'(\tilde{w})(\tilde{r} - r_F)] = 0$$

多只风险证券

定理 8.5 当且仅当 $E[\tilde{r}_n] = r_F, \forall n = 1, \cdots, N-1$ 时最优组合 $a = 0$。

定理 8.6 最优组合的期望收益率大于无风险收益率。

定理8.6 证明

1期财富： $\tilde{w}=w(1+r_F)+a^T(\tilde{r}-r_F I)$

最优要求： $E[u(\tilde{w})]\geq u(w(1+r_F))$

*Jensen*不等式：

$$E[u(\tilde{w})]\leq u(E[\tilde{w}])=u(w(1+r_F)+E[a^T(\tilde{r}-r_F I)]$$

$$E[a^T(\tilde{r}-r_F I)]=\sum_{n=1}^{N}a_n E[\tilde{r}_n]-r_F\sum_{n=1}^{N}a_n$$

$$=w(\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{w}E[\tilde{r}_n]-r_F)\geq 0$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{a_n}{w}E[\tilde{r}_n]\geq r_F$$