风险厌恶

第7章

7.1 边际效用递减

定义7.1对于函数$u(\bullet)$，如果$\forall x$，y及$\alpha\in[0,1]$,

$$u(\alpha x+[1-\alpha]y)\geq \alpha u(x)+(1-\alpha)u(y)$$

则称$u(\bullet)$为凹的

定理7.1

- 如果凸的连续偏好由（6.4）的期望效用函数表示，那么相应的效用函数u是凹的

- 提示：考虑$[c_0; c_1]=[x;0]$
- 6.4：$U(c) = u(x)$
- 凸性偏好U：$x>y$, $0<a<1$
  $u(ax+[1-a]y)>au(x)+(1-a)u(y)$

定理7.2

如果凹函数$u(\bullet)$二阶可微，则$u'' \le 0$

$u(\bullet)$: 消费的直接效用

$u' > 0$: 消费的边际效用（不满足性）

$u'' \le 0$: 消费的边际效用递减（偏好的凸性）

7.2 风险厌恶的定义

定义 7.2 记 $\tilde{g}$ 为一个不确定的支付。如果 $E(\tilde{g})=0$，则称 $\tilde{g}$ 为一个公平赌博。

定义 7.3 称效用函数为 $u(\bullet)$ 的参与者是（严格）**风险厌恶**（risk averse）的，如果

$$E[u(w+\tilde{g})]\le(<)E[u(w)],\forall E[\tilde{g}]=0$$

风险厌恶的经济意义

- 确定w，不确定w+g
- E(w)=E(w+g)

- 在期望值相同的确定与不确定性收支之间，一个风险厌恶者总是选择确定收支

风险厌恶的定义（续）

- 定理7.3 当且仅当u是（严格）凹函数时，参与者（严格）风险厌恶

- 当偏好可以由期望效用表示时，凸性意味着风险厌恶（偏好凸， u凹，风险厌恶）

定理7.3 证明

必要性：风险厌恶$\rightarrow u(\bullet)$是凹的

设$x>0$，$p\in(0,1)$

构造一个公平游戏 $\tilde{g}=\{([p-1]x,p);(px,1-p)\}$

风险厌恶： $pu(w+[p-1]x)+(1-p)u(w+px)\le u(w)$

或： $pu(w_1)+(1-p)u(w_2)\le u(pw_1+[1-p]w_2)$

充分性：$u(\bullet)$是凹的$\rightarrow$风险厌恶

对凹函数应用Jensen不等式：

$$E[u(w+\tilde{g})]\le u(E(w+\tilde{g}))=u(w)$$

7.3 风险厌恶的度量

定义7.4 参与一个公平游戏所要求的风险溢价π为

$$E[u(w+\tilde{g})]=u(w-\pi)$$

π**:** 为消除风险而愿意放弃的财富（保险费）

- π**:** 风险赌博的等价确定值

小风险

定义7.5 当随机变量$\tilde{g}$的取值范围很小时，称$\tilde{g}$为风险小的赌博

$$E[u(w+\tilde{g})]=E[u(w)+u'(w)\tilde{g}+\tfrac{1}{2}u''(w)\tilde{g}^2+]$$
$$=u(w)-u'(w)\pi+$$

小风险的风险溢价：

$$\pi=\frac{1}{2}[-\frac{u''(w)}{u'(w)}]Var[\tilde{g}]$$

系数代表风险厌恶程度

方差度量小风险的风险

风险厌恶的度量

风险厌恶的Arrow - Pratt度量（绝对风险厌恶）：

$$A(w) \equiv -\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

风险容忍（risk tolerance）系数：

$$T(w) \equiv \frac{1}{A(w)}$$

相对风险厌恶

- relative risk aversion：对总财富的相对大小

$$R(w) \equiv -\frac{wu''(w)}{u'(w)} = -w\frac{u''(w)}{u'(w)}$$

7.4 线性或风险中性

- $u(w)=w$

- $A(w)=R(w)=0$

负指数

$$u(w) = -e^{-aw}, a > 0$$

$$A(w) = a, R(w) = aw$$

CARA：恒定绝对风险厌恶

平方

$$u(w) = w - \tfrac{1}{2} a w^2, a > 0, w \in [0, \tfrac{1}{2})$$

$$A(w) = \frac{a}{1 - aw}, R(w) = \frac{aw}{1 - aw}$$

幂指数

$$u(w)=\frac{1}{1-\gamma}w^{1-\gamma},\gamma>0,\gamma\neq 1$$

$$A(w)=\frac{\gamma}{w},R(w)=\gamma$$

CRRA：恒定相对风险厌恶

对数

$$u(w) = \ln w$$

$$A(w) = \frac{1}{w}, R(w) = 1$$

$CRRA$：恒定相对风险厌恶

双曲线绝对风险厌恶（HARA）

$$A(w)=\frac{1}{d+w/\gamma},\gamma\geq -1$$

风险中性： $d\to\infty$

平方： $d=\frac{1}{a},\gamma=-1$

负指数： $d=\frac{1}{a},\gamma\to\infty$

幂指数： $d=0,\gamma>0,\gamma\neq 1$

对数： $d=0,\gamma\to 1$

风险厌恶与财富

- 绝对风险厌恶递增、减：IARA, DARA
- 相对风险厌恶递增、减：IRRA, DRRA

7.5 风险厌恶的比较

定理 7.4 （Pratt）下面的命题是等价的：

1.$A_1(w) \ge A_2(w), \forall w$；

2.$u_1(u_2^{-1}(z))$ 是凹的；

3.$\exists f(\bullet), f'(\bullet) > 0$ 且 $f''(\bullet) \le 0$ 使得 $u_1(w) = f[u_2(w)]$；

4.$\pi_1 \ge \pi_2$，对所有的 W 和公平赌博成立。

定理7.4 证明

$$1 \Rightarrow 2: f'(z) = \frac{\partial u_1(w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad w = u_2^{-1}(z)$$

$$z = u_2(w), \qquad \frac{\partial z}{\partial w} = u_2'(w)$$

$$2 \Rightarrow 3: f(z) = u_1(u_2^{-1}(z)), \qquad f(u_2(w)) = u_1(w)$$

$$3 \Rightarrow 4: u_1(w-\pi_1) = E[u_1(w+\tilde{g})] = E[f(u_2(w+\tilde{g}))]$$

$$\le f(E[u_2(w+\tilde{g})]) = f(u_2(w-\pi_2)) = u_1(w-\pi_2)$$

$A_1(w) > A_2(w)$:参与者1比2更风险厌恶

7.6 一阶风险厌恶

$$u(w)=\begin{cases} a_+(w-\overline{w}), w \geq \overline{w} \\ a_-(w-\overline{w}), w < \overline{w} \end{cases} \qquad a_- > a_+ > 0 \text{（}u\text{不可微）}$$

假设财富正好是$\overline{w}, \tilde{g}=\{(-\delta,\frac{1}{2});(\delta,\frac{1}{2})\}$:

$$\begin{aligned} E[u(\overline{w}+\tilde{g})] &= \tfrac{1}{2}u(\overline{w}-\delta)+\tfrac{1}{2}u(\overline{w}+\delta) \\ &= \tfrac{1}{2}a_-(\overline{w}-\delta-\overline{w})+\tfrac{1}{2}a_+(\overline{w}+\delta-\overline{w}) \\ &= -\tfrac{1}{2}(a_- - a_+)\delta \end{aligned}$$

$$u(\overline{w}-\pi)=a_-(\overline{w}-\pi-\overline{w})=-a_-\pi$$

$$\pi=\tfrac{1}{2}(a_- - a_+)\delta/a_-$$