期权：一个套利定价的例子

第5章

Fischer Black (1938-1995)

- Harvard BS (1959), PhD (kicked out of GS; 1964)
- Arthur D. Little, Treynor and CAPM
- Black-Scholes PDE in 1969
- Chicago, 1971-1975
- MIT, 1976-1984
- Goldman Sachs, 1984-1995

Myron Scholes (1941-)

- Canadian, Jewish
- Chicago, PhD (1968): programming & Miller
- MIT, 1968-1974
- Chicago, 1974-1983
- Stanford, 1983-
- LTCM, 1994
- Nobel, 1997

Rebert Merton (1944-)

- Famous father, Jewish
- MIT, PhD (1969): apply to economics, Samuelson
- Failed to get the Society of Fellows
- MIT, 1969-1988: Modigliani
- Harvard, 1988-
- LTCM, 1994
- Nobel, 1997
- Finance, Continuous-Time Finance

5.1 期权option

- 欧式买权**European call**使其持有人有权在未来某一给定日期、以某一确定价格买入一定单位的股票
- 欧式卖权put：卖出股票
- 相关术语：
  - 到期日maturity date, maturity
  - 执行价格exercise price
  - 标的证券underlying security：标的资产underlying asset

期权（续）

- 终期收支Payoff：

$$\tilde{c} = [\tilde{X} - K]_+ = \max[0, \tilde{X} - K]$$

$$\tilde{p} = [K - \tilde{X}]_+ = \max[0, K - \tilde{X}]$$

期权（续）

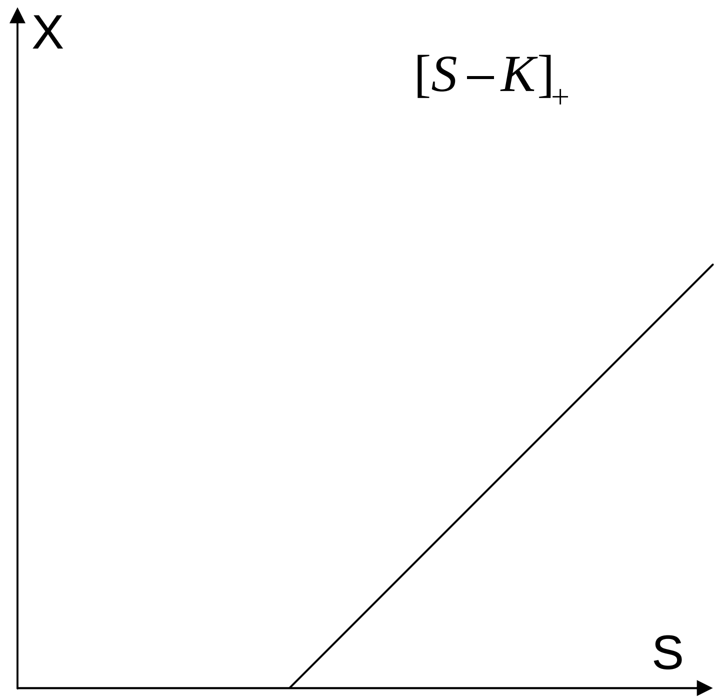
- 内在价值intrinsic value (IV)：
  - 看涨期权：S-K
  - 看跌期权：K-S
- 期权按内在价值分类：
  - 实值in-the-money：　　IV>0
  - 平值in-the-money：　　IV=0
  - 虚值out-of-the-money：IV<0

期权（续）

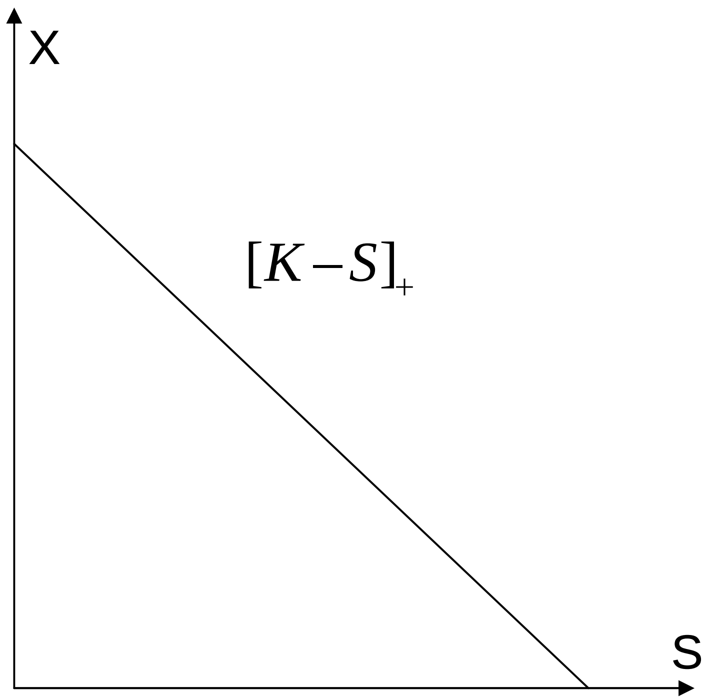
- 期权的立权人option writer：期权的卖出者
- 期权是买、卖者之间的零和交易
- 期权的净头寸恒为0

- 衍生证券derivative security：
  - 净供给为0
  - 支付由其他证券的价格或支付决定

期权（续）



看涨期权买方的收益



看跌期权买方的收益

期权（续）

- 美式买权American Call使其持有人有权在到期日前任意一天（包括到期日）、以某一确定价格买入一定单位的股票

- 美式卖权American Put：卖出股票

5.2 期权价格界的性质

- 期权价格的影响因素：
  - 标的证券的价格和支付
  - 期权的合同条款：到期日和执行价，提前执行
  - 利率
- 由无套利原理有：
  - 定理5.1 $c(S,K)$和$p(S,K)$是非负的
  - 定理5.2 $c(S,K)$对K非增，$p(S,K)$对K非减

期权价格界的性质（续）

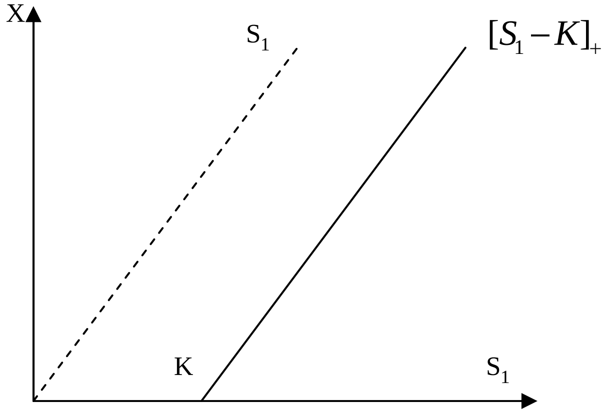
定理 5.3 $c(S,K)$ 与 $p(S,K)$ 是 K 的凸函数。

定理 5.4 记 $\theta \geq 0$ 为由 N 只证券组成的组合，价格向量为 $S=[S_1;\cdots;S_N]>0$，以及执行价格为 $K=[K_1;\cdots;K_N]>0$。那么

$$c(S^T\theta,K^T\theta)\leq\sum_{i=1}^{N}\theta_i c(S_i,K_i),\ p(S^T\theta,K^T\theta)\leq\sum_{i=1}^{N}\theta_i p(S_i,K_i)$$

期权价格界的性质（续）

定理 5.5 $S \geq c(S,K)$



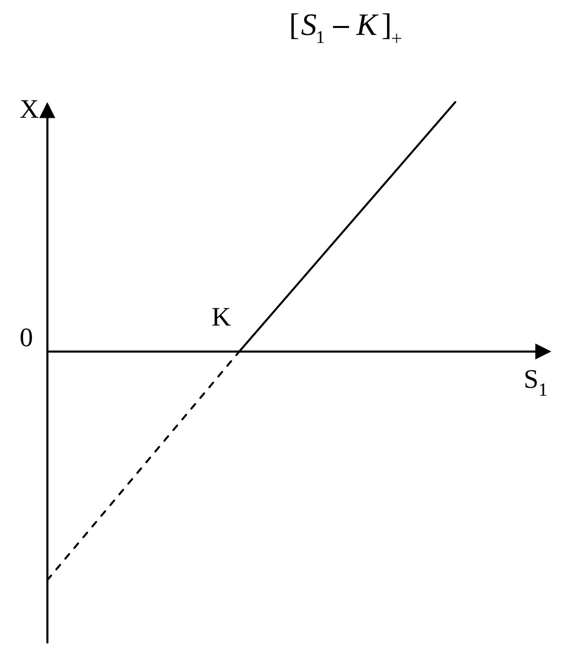
欧式看涨期权的价格上界

期权价格界的性质（续）

定理 5.6 如果存在无风险证券，

其收益率也就是利率为 r_F，那么

$$c(S,K) \geq [S - \frac{K}{1+r_F}]_+$$



欧式看涨期权的价格下界

期权价格界的性质（续）

定理 5.7 （看涨—看跌期权的平价关系）如果存在无风险证券且利率为r_F，那么

$$c(S,K)+\frac{K}{1+r_F}=p(S,K)+S$$

5.3 美式期权以及提前执行

- 对于美式期权来说，**提前执行early exercise**只是权利而非义务
- 期权持有者只有在他更优时才提前执行
- 美式期权的价格永远不会低于相应的欧式期权的价格：

$$C(S,K)\geq c(S,K), P(S,K)\geq p(S,K)$$

无股利时的提前执行

- 对于美式看涨期权，提前执行的结果为S-K，但这是一个次优的选择，因为：

$$S-K \leq S-\frac{K}{1+r_F} \leq \left[S-\frac{K}{1+r_F}\right]_+ \leq c(S,K)$$

无股利时的提前执行（续）

- 对于美式看跌期权，没有股利，提前执行可以是最优的：

$$P(S,K)=\max\left[K-S,p(S,K)\right]=\max\left[K-S,\frac{K}{1+r_F}-S+c(S,K)\right]$$

如果$K-S>\dfrac{K}{1+r_F}-S+c(S,K)$，则提前执行是最优的。

有股利时的提前执行

- 假设股票在0期时支付股利D，S为发放股利后的股价
- 美式看涨期权持有者在0期有两个选择：
  - 支付K执行期权，获得股利后马上抛出股票，得到D+S-K的收益
  - 持有期权直至1期（到期日）
- 最优执行策略为：

$$C(S,D,K)=\max[S+D-K,c(S,K)]$$

有股利时的提前执行（续）

- 对于看跌期权，最优执行策略为：

$$P(S,D,K)=\max[K-S-D,p(S,K)]$$

因为$C(S,D,K)\geq c(S,K),P(S,D,K)\geq p(S,K)$

所以，对于美式期权来说，股利促使持有者提前执行看涨期权、推迟执行看跌期权。

有股利时的提前执行（续）

- 在有股利时，看涨期权和看跌期权的平价关系为：

$$c(S,K)+\frac{K}{1+r_F}+D=S+p(S,K)$$

5.4 完备市场中的期权定价

如果证券市场是完全的，那么存在唯一的状态价格向量：$\phi_\omega, \forall \omega \in \Omega$。

记 S_ω 为标的资产在状态 ω 时的支付。那么

$$c(S,K) = \sum_\omega \phi_\omega [S_\omega - K]_+ = \frac{1}{1+r_F} E^Q[\tilde{S} - K]_+$$

Q 是风险中性测度。

完备市场中的期权定价（续）

- 二叉树期权定价binomial model for option pricing：

令 $q=\dfrac{\phi_u}{\phi_u+\phi_d}=\dfrac{1+r_F-d}{u-d}, 1-q=\dfrac{\phi_d}{\phi_u+\phi_d}=\dfrac{u-(1+r_F)}{u-d}$

期权定价公式可写为

$$c=\frac{1}{1+r_F}[qc_u+(1-q)c_d]=\frac{E^Q[c_1]}{1+r_F}$$

定义 $\hat{c}\equiv\dfrac{c}{B}, \hat{S}\equiv\dfrac{S}{B}$，那么，我们有

$$\hat{c}_t=E_t^Q[\hat{c}_{t+1}], \hat{S}_t=E_t^Q[\hat{S}_{t+1}]$$

这里 $t=0$。所以，$\hat{c}_t$ 和 $\hat{S}_t$ 在等价鞅测度 Q 下是鞅。

5.5 期权与市场完全化

- 如果证券市场是完备的，可以用原生证券primary security即标的证券和债券的价格为期权定价

- 如果市场是不完备的，则期权可以增进市场的完备性，甚至使市场完备化
- 完备市场有助于资源的有效配置

简单期权策略

- 蝴蝶头寸**butterfly position:** 由同一标的证券上的、到期日相同但执行价格不同的欧式看涨期权构成的组合:
  - 买入**1**份执行价格为**K-** δ 的看涨期权
  - 卖出**2**份执行价格为**K**的看涨期权
  - 买入**1**份执行价格为**K+** δ 的看涨期权

利用期权使市场完全化

- 状态索引证券**state-index security**：具有状态有别收支（分离支付）的证券

状态有别收支state separating payoff :

$$\text{if} \quad \forall \omega, \omega^{'} \in \Omega, \omega \neq \omega^{'}, \ \text{then} \ X_{\omega} \neq X_{\omega^{'}}$$

利用期权使市场完全化（续）

我们引入以状态指数证券为标的证券的欧式看涨期权。执行价格为 X_ω 的欧式看涨期权具有如下的支付：

$$[\tilde{X}-X_\omega]=[\underset{1}{0};\cdots;\underset{\omega}{0};\underset{\omega+1}{X_{\omega+1}-X_\omega};\underset{\omega+2}{X_{\omega+2}-X_\omega};\cdots;\underset{\Omega}{X_\Omega-X_\omega}]$$

利用期权使市场完全化（续）

- 考虑如下Ω只证券组成的组合：
  - 买入1份状态索引证券
  - 买入以状态索引证券为标的资产、执行价格分别为确X_1，X_2，…，$X_{\Omega-1}$的欧式看涨期权（每种期权买入1份，共Ω−1份）

利用期权使市场完全化（续）

- 这 Ω 只证券的支付为：

$$X=\begin{pmatrix} X_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ X_2 & X_2-X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ X_3 & X_3-X_1 & X_3-X_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ X_\Omega & X_\Omega-X_1 & X_\Omega-X_2 & \cdots & X_\Omega-X_{\Omega-1} \end{pmatrix}$$

利用期权使市场完全化（续）

- X满秩，市场是完备的。以状态索引证券为标的资产的期权组合可以复制AD证券
- 假设在状态1，2，…，Ω时状态索引证券的支付分别为δ，2δ，3δ，…，Ωδ
- 考虑以状态索引证券为标的资产、执行价格分别为0，δ，2δ，3δ，…，（Ω-1）δ的看涨期权组合。其支付矩阵为：

利用期权使市场完全化（续）

$$X=\begin{pmatrix} \delta & 0 & \cdots & 0 \\ 2\delta & \delta & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Omega\delta & (\Omega-1)\delta & \cdots & \delta \end{pmatrix}$$

复制AD证券

- 执行价(k-1)δ，kδ，(k+1) δ蝴蝶头寸复制状态k的AD证券，payoff为δ

- 状态索引证券的期权组合：可复制任意AD证券
- AD证券的状态价格：期权组合的现价

利用期权使市场完全化（续）

- 证券价格的鞅性质

$$S=\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}X(K)dK$$

$$q(K)=\frac{\dfrac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}}{\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}dK}$$

$$B=\frac{\partial^2 c(K)}{\partial K^2}dK$$

$$\frac{S}{B}=\int_0^{\infty}q(K)X(K)dK$$