套利和资产定价

第4章

4.1 一般市场结构

- 复合证券composite security：在多个状态下有支付，且它们的Payoff都可以看成是由AD证券的组合而产生的，如债券、股票
- 有*N*个证券的市场结构：

$$X=\begin{pmatrix} x_{1,1} & \cdots & x_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\Omega,1} & \cdots & x_{\Omega,N} \end{pmatrix}$$

冗余证券

- redundant security：Payoff可以表示成其它证券支付的线性组合的证券
- 存在原因：市场摩擦（使复制有额外成本）
- 由原来*N*只证券的组合生成的任意支付可由删除冗余证券之后的*N*-1只证券的组合生成：

$$
\begin{aligned}
x = X\theta &= x_1\theta_1 + \cdots + x_j\theta_j + \cdots + x_N\theta_N \\
&= (x_1\theta_1 + \cdots + x_{j-1}\theta_{j-1} + x_{j+1}\theta_{j+1} + \cdots + x_N\theta_N) + x_j\theta_j \\
&= X_{\setminus j}\theta_{\setminus j} + X_{\setminus j}\theta^*_{\setminus j}\theta_j = X_{\setminus j}(\theta_{\setminus j} + \theta^*_{\setminus j}\theta_j)
\end{aligned}
$$

证券市场的不同描述

- 忽略市场摩擦，对市场结构X的描述中可以只包括具有线性独立支付的N只证券，N≤Ω
- 秩：rank(X)=min{N, Ω}=N
- 给定具有线性独立支付矩阵X的证券集合，可以形成N个线性独立的组合（每个组合又可以当作一只证券）：

$$X_\theta \equiv \begin{pmatrix} x_{1,\theta_1} & \cdots & x_{1,\theta_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\Omega,\theta_1} & \cdots & x_{\Omega,\theta_N} \end{pmatrix} = X[\theta_1, \cdots, \theta_N]$$

证券市场的不同描述（续）

令 $H\equiv[\theta_1,\cdots,\theta_N]$，则 H 为 $(N\times N)$ 矩阵，且 $X_\theta=XH$。因为各组合（**H** 的列向量）之间是独立的，所以 **H** 满秩。故

$$rank(X_\theta)=rank(XH)=rank(X)=N$$

$$X=X_\theta H^{-1}$$

所以，原始证券的任意组合，如 θ，都可以由 $\theta_1,\cdots,\theta_N$ 的组合 $H^{-1}\theta$ 复制：

$$X\theta=XHH^{-1}\theta=X_\theta(H^{-1}\theta)$$

因此，如果不存在摩擦，独立组合 $\theta_1,\cdots,\theta_N$ 提供了市场结构的一个等价描述。

生成

- 定理4.1 当且仅当具有线性独立支付的证券数等于状态数时证券市场是完备的
- 此时称经济中的不确定性可由市场中的证券生成span
- 当rank(X)=N=Ω时，X是可逆方阵，可以用复合证券复制所有的AD证券（满秩市场与AD市场等价）：

$$X\theta = 1_{\omega}$$

$$\theta_{\omega} = X^{-1} 1_{\omega}$$

4.2 套利

- 证券交易的价格向量S，支付矩阵X
- 资产定价关系asset pricing relation或资产定价模型asset pricing model：从X到S的映射

- 一证券组合在0期的成本：$S^T\theta$
- 该组合在1期的收支向量：$X\theta$

- Payoff非负（$X\theta \geqslant 0$）：Limited Liability

套利（续）

定义 4.1 将满足下列条件的组合 θ 称做**套利（arbitrage）**或**套利机会（arbitrage opportunity）**:

（1）$S^T\theta \le 0$

（2）$X\theta \ge 0$

（3）至少有一个不等式严格成立。

三种套利

套利的三种类型：

- 第 1 类套利： $S^T\theta<0$ 且 $X\theta=0$；
- 第 2 类套利： $S^T\theta=0$ 且 $X\theta>0$；
- 第 3 类套利： $S^T\theta<0$ 且 $X\theta>0$。

- 第1类套利：获得当前收益却不承担任何未来责任
- 第2类套利，初始投资为0却得到正的未来收益
- 套利组合arbitrage portfolio：初始投资为0的组合
- 第3类套利：是第1类和第2类套利的结合

Ex 4.1 Page 54

- 三种证券的价格与支付分别为：

A：1，[1；1；1]

B：1，[0；2；2]

C：2，[2；0；0]

- 组合1：[2；-1；-1]
- 组合2：[0；1；1]
- 组合3：[2；0；-1]

套利的界定

- 只依赖公共信息，即价格与终期收支；不依赖状态概率；任何人都可利用套利机会
- 利用新生产技术或私有信息获利，不属于套利

4.3 无套利原理

- 给定支付矩阵，价格不能是任意的，否则可能有套利机会出现，这意味交易机会，说明市场没达到均衡

- 定理4.2 在市场均衡中不存在套利机会

- 反证：$c_k+[-S^T\theta;X\theta]>c_k$及不满足性

4.3 无套利原理

- 定义4.2 无套利原理Principle of No-Arbitrage：证券市场不存在套利机会
- 无套利原理依赖于两个假设：（至少一个）参与者不满足；市场无摩擦
- 因不满足性一般总是成立的，无套利等同于市场无摩擦

MM，1958；Ross，1975，1978

4.4 资产定价基本定理

- 资产定价关系或模型指的是从证券的支付X到其价格S的映射：

$$S=V(X)$$

- 其中，$V(\cdot)$称为定价算子pricing operator或估价算子valuation operator
- 算子: 映射或函数

定价算子的性质

- 定理4.3（一价定律） 两个具有相同支付的证券或组合的价格必然相同。即：

$$\text{如果}x=y\text{，则}V(x)=V(y)$$

- 定理4.4 支付为正的证券或组合的价格为正。即：

$$\text{如果}x>0\text{，则}V(x)>V(0)=0$$

定价算子的性质（续）

定理 4.5 给定两只证券 1 和 2，如果证券 1 的支付总是大于证券 2，那么证券 1 的价格必高于证券 2 的价格。即

$$\text{如果 } x_1 \geq x_2\text{，则 } V(x_1) \geq V(x_2)$$

定理 4.6 在一个无摩擦市场中，定价算子是递增的线性算子。即对于任意 $a,b \in R$，以及具有支付 x, y 和 $z = ax + by$ 的三只证券，

$$V(ax+by) = aV(x) + bV(y)$$

线性算子

定理4.6意味着：$V(x)=\phi^T x$，ϕ为正向量

- 定理4.7 （资产定价基本定理，fundamental theorem of asset pricing）证券市场无套利机会的充要条件为存在$\phi>>0$使得：

$$S=[S_1;\ldots;S_N]=(\phi^T X)^T$$

定价算子的性质（续）

- 定理4.8 在一个完备市场中，状态价格向量是唯一的

- 证明：设组合 θ 复制 ω 态索取权，则其成本 $S^T\theta=\phi$ 是确定的，即 ω 态的状态价格是唯一的

4.5 风险中性定价和鞅

- 无风险债券：Payoff为1的证券

- 无风险利率riskless interest rate：1单位无风险证券投资获得的净支付或收益率rate of return
- 货币的时间价值time value of money：以今天的1单位资源交换未来确定的资源时市场提供的回报

无风险债券定价

成本（定价）： $S_1 = \phi^T x_1 = \phi^T \overline{1} = \sum_{\omega\in\Omega} \phi_\omega$

无风险利率： $S_1(1+r_F)=1$

折现因子： $\dfrac{1}{1+r_F} = S_1$

风险中性定价和鞅（续）

任意证券定价： $S_n = \phi^T x_n = \sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega x_{\omega,n} = S_1 \sum_{\omega \in \Omega} q_\omega x_{\omega,n}$

$q_\omega \equiv \dfrac{\phi_\omega}{S_1} = \dfrac{\phi_\omega}{\sum_{\omega \in \Omega} \phi_\omega}$ 定义一个概率测度，即风险中性测度

4.9式（风险中性定价）： $S_n = \dfrac{E^Q[\tilde{x}_n]}{1 + r_F}$

Ex 4.3 Page 61

- 1期有两个概率相等的态。市场上有两只证券，价格与支付为：1，[1；1]及0.5，[2；0]
- 解：$1(1+r)=1$, $\phi_a+\phi_b=1$

  $2\phi_a=0.5$

  $Q=\{1/4,3/4\}$

  证券2的价格：$(1/4)2+(3/4)0=0.5$, but

  $(1/2)2+(1/2)0=1$（在P下不正确）

风险中性定价和鞅（续）

- 风险中性定价公式对新定义的测度Q而不是实际的概率测度P取期望值
- P: 反映各状态的实际概率
- Q: 由状态价格定义，表示的是规范化的状态价格向量，因而它实际上已经把证券的风险考虑进去了
- 风险中性定价公式表达的是定价关系，而不是实际的概率预期

风险中性定价和鞅（续）

- 普通价格以0期消费品为计量单位
- 以1单位的无风险证券作为价格的计量单位:

风险中性定价：
$$S_n = \frac{E^Q[\tilde{x}_n]}{1+r_F}$$

或：
$$\frac{S_n}{S_1} = E^Q[\frac{\tilde{x}_n}{\tilde{x}_1}] = E^Q[\frac{S_{n,1}}{S_{1,1}}]$$

即：
$$\hat{S}_{n,0} = E^Q[\hat{S}_{n,1}]$$

风险中性定价和鞅（续）

定义 4.3 如果一个随机过程，$z_1, z_2, \cdots$ 现在的值恒等式对于其未来值的条件期望：$z_t = E_t[z_{t+1}]$，那么我们称之为鞅。

- 如果以债券价格为计量单位，证券价格在风险中性测度Q下是鞅过程
- Q也称为等价鞅测度equivalent martingale measure
- 等价是说Q与真实的概率测度P等价：给定两个概率测度，如果他们有相同的0概率集，则称这两个概率测度是等价的