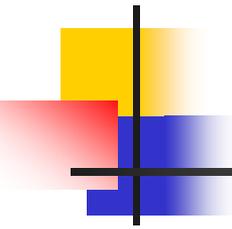


套利定价理论 (APT)

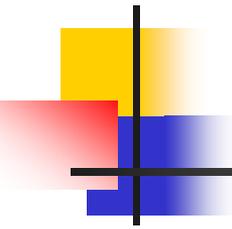
第14章



引言

- CAPM: 基于M-V偏好
- 风险: 系统、残余 (无溢价)
- Beta: 度量市场风险

- APT: 基于风险结构、及无套利
- Ross, 1976



线性因子linear factor模型

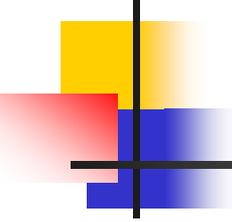
$$\tilde{r}_n = \bar{r}_n + \sum_{k=1}^F b_{n,k} \tilde{f}_k + \tilde{\varepsilon}_n, n=1, \dots, N$$

其中

$$(1) E[\tilde{f}_k] = E[\tilde{\varepsilon}_n] = 0, \forall n, k$$

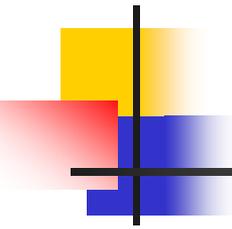
$$(2) E[\tilde{f}_k^2] = 1, E[\tilde{\varepsilon}_n^2] = \sigma_n^2 < \bar{\sigma}_n^2$$

$$(3) E[\tilde{f}_k \tilde{f}_{k'}] = E[\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\varepsilon}_{n'}] = E[\tilde{f}_k \tilde{\varepsilon}_n] = 0, \forall k \neq k', n \neq n'$$



因子模型

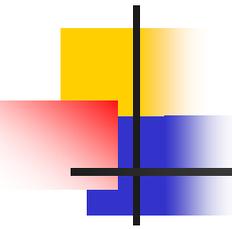
- 14.1第1项：期望收益率
 - 第2项：F个因子风险（系统），loading
 - 第3项：特异Idiosyncratic风险
 - $F < \text{证券数}N$
-
- 14.1与13.4相似
 - 向量形式：14.2



14.2 精确因子和套利定价

$$\tilde{r}_n = \bar{r}_n + b_n \tilde{f}, \forall n$$

- 上式为**精确**单因子模型：无特异风险
- 若有两个资产，其**因子载荷b**均非零且不相等
- 引理14.1 存在一个无风险组合
- 引理14.2 存在一个因子载荷为1的组合



引理 证明

两个资产 i 、 j , 且 $b_i \neq b_j, b_i \neq 0, b_j \neq 0$

组合: $\tilde{r}_p = \alpha \tilde{r}_i + (1 - \alpha) \tilde{r}_j$

$$= [\alpha \bar{r}_i + (1 - \alpha) \bar{r}_j] + [\alpha b_i + (1 - \alpha) b_j] \tilde{f}$$

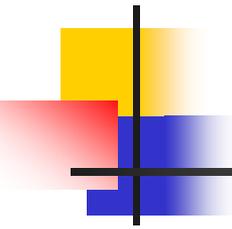
$\alpha b_i + (1 - \alpha) b_j = 0 \quad \Rightarrow$ 无风险组合

$$\alpha \bar{r}_i + (1 - \alpha) \bar{r}_j = r_F \quad \Rightarrow \frac{\bar{r}_i - r_F}{b_i} = \frac{\bar{r}_j - r_F}{b_j} = \lambda$$

$$\alpha b_i + (1 - \alpha) b_j = 1 \quad \Rightarrow \tilde{r}_{p1} = r_F + \lambda + \tilde{f}$$

单位风险因子组合 factor portfolio

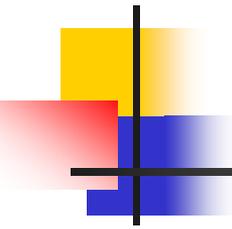
λ 风险溢价、或因子溢价 factor premium



精确单因子套利定价

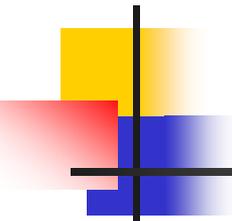
定理 14.1 如果资产收益由精确单因子模型 (14.3) 式描述, 那么它们的风险溢价如下:

$$\bar{r}_n = r_F + b_n \lambda, \forall n$$



Arbitrage Pricing

- 14.5来自于无套利：套利定价
- 14.5与CAPM形式一样：若 $f = a(\bar{r}_M - r_F)$
- 若14.5不满足：可套利
- 买入1元资产n，卖出 b_n 元因子组合、及 $1 - b_n$ 元无风险资产
- 卖出1元资产n，买入 b_n 元因子组合、及 $1 - b_n$ 元无风险资产



精确F因子模型

定理14.2 给定收益的F因子模型，无套利要求

$$\bar{r} = \lambda_0 \mathbf{1} + \sum_{j=1}^F b_j \lambda_j \quad (14.6)$$

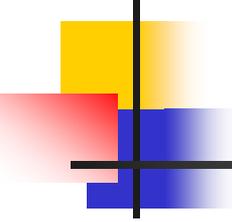
其中 b_j 是 b 的第 j 列

证明： $z^T \mathbf{1} = 0$ ： z 称为套利组合（投资为0）

无套利要求若 $z^T b = 0$ （零因子风险），则 $z^T \bar{r} = 0$

故 \bar{r} 与 $\mathbf{1}$ 、 b_j 正交，可由 $\mathbf{1}$ 、 b_j 线性表示

若有 $F+1$ 个资产线性无关，则引理14.1-2成立



精确因子模型

- 任何资产可由因子组合复制
- 无套利 → 资产定价

- 一般因子模型：特异风险无法复制，企望由组合而分散、消除特异风险

14.3 极限套利与APT

定义 14.1 给定资产 $n = 1, 2, \dots$ ，极限套利机会是一个有前 n 个资产构成的套利组合序列 $z^{(n)}$ ，使得当 $n \rightarrow \infty$ 时，

1. $z^{(n)T} \bar{r}^{(n)} \rightarrow \delta > 0$

2. $Var[z^{(n)T} \tilde{r}^{(n)}] \rightarrow 0$

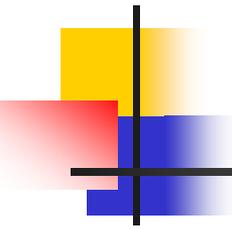
其中， $\tilde{r}^{(n)}$ 是组合中 n 项资产的收益向量，而 $\bar{r}^{(n)}$ 是它的均值。

极限套利和APT（续）

定理 14.3 如果资产收益由带有有界剩余风险的 F 因子模型描述，并且不存在极限套利机会，那么对于任意 n ，存在 $\lambda_0^{(n)}$ ， $\lambda^{(n)}$ 和 A 使得

$$\sum_{i=1}^n (\bar{r}_i^{(n)} - \lambda_0^{(n)} - b_i^{(n)T} \lambda^{(n)})^2 \leq A$$

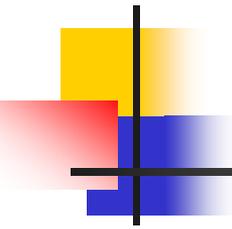
其中， A 是与 n 无关的常数。



极限套利和APT（续）

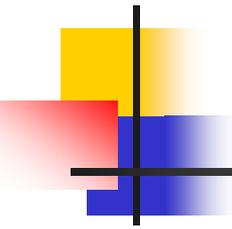
定理14.4 极限无套利意味着存在 λ_0 和 λ ，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\bar{r}_i - \lambda_0 - b_i^T \lambda)^2 < \infty$$



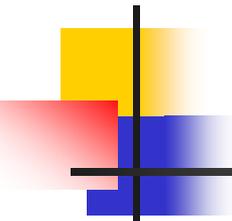
定理的含义

- 14.3 对任意资产数目 n ，可找到一个近似的定价关系，使总定价误差有界
- 14.4 极限无套利=总定价误差有限：对任意 $\varepsilon > 0$ ，定价误差 $> \varepsilon$ 的资产数目是有限的（ATP只对少数资产不成立）



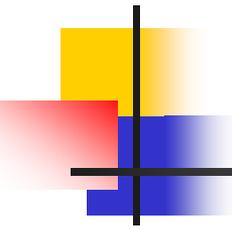
14.4 极限套利和均衡

- 无套利是均衡的必要条件，而极限无套利则不是一个均衡要求
- 极限无套利的条件实际上包含着对参与者偏好和/或资产支付的限制



14.5 作为均衡结果的APT

- 定理14.5 如果：
 1. 证券支付具有如（14.7）式给出的因子结构，且其中有一个是无风险的；
 2. 每个因子都可由证券支付线性表出；
 3. 参与者的1期消费可由证券支付线性表出；
 4. 1期的总禀赋可由因子线性表出；
 5. 参与者是严格风险厌恶的，且
 6. 均衡配置是内部解。
- 那么，APT定价关系（14.6）式在均衡下成立



APT小结

- 线性因子模型：一组系统、特异风险
- 风险因子是什么：未知！
- 无残余：无套利给出精确定价关系
- 有残余：极限无套利给出近似定价关系
- 实证问题：CAPM中系统即市场，易实证；ATP中系统风险未知，不易实证