套利定价理论（APT）

第14章

引言

- CAPM: 基于M-V偏好
- 风险：系统、残余（无溢价）
- Beta：度量市场风险

- APT：基于风险结构、及无套利
- Ross, 1976

线性因子linear factor模型

$$\tilde{r}_n = \bar{r}_n + \sum_{k=1}^{F} b_{n,k} \tilde{f}_k + \tilde{\varepsilon}_n, n = 1, \cdots, N$$

其中

$$(1) E[\tilde{f}_k] = E[\tilde{\varepsilon}_n] = 0, \forall n, k$$

$$(2) E[\tilde{f}_k^2] = 1, E[\tilde{\varepsilon}_n^2] = \sigma_n^2 < \bar{\sigma}_n^2$$

$$(3) E[\tilde{f}_k \tilde{f}_{k'}] = E[\tilde{\varepsilon}_n \tilde{\varepsilon}_{n'}] = E[\tilde{f}_k \tilde{\varepsilon}_n] = 0, \forall k \neq k', n \neq n'$$

因子模型

- 14.1第1项：期望收益率
- 第2项：F个因子风险（系统），loading
- 第3项：特异Idiosyncratic风险
- F < 证券数N

- 14.1与13.4相似
- 向量形式：14.2

14.2 精确因子和套利定价

$$\tilde{r}_n = \bar{r}_n + b_n \tilde{f}, \forall n$$

- 上式为精确单因子模型：无特异风险

- 若有两个资产，其因子载荷b均非零且不相等
- 引理14.1 存在一个无风险组合
- 引理14.2 存在一个因子载荷为1的组合

引理 证明

两个资产i、j，且$b_i \neq b_j, b_i \neq 0, b_j \neq 0$

组合：$\tilde{r}_p = \alpha\tilde{r}_i + (1-\alpha)\tilde{r}_j$

$$= [\alpha\bar{r}_i + (1-\alpha)\bar{r}_j] + [\alpha b_i + (1-\alpha)b_j]\tilde{f}$$

$\alpha b_i + (1-\alpha)b_j = 0 \qquad \Rightarrow$ 无风险组合

$\alpha\bar{r}_i + (1-\alpha)\bar{r}_j = r_F \qquad \Rightarrow \frac{\bar{r}_i - r_F}{b_i} = \frac{\bar{r}_j - r_F}{b_j} = \lambda$

$\alpha b_i + (1-\alpha)b_j = 1 \qquad \Rightarrow \tilde{r}_{p1} = r_F + \lambda + \tilde{f}$

单位风险因子组合factor portfolio

λ风险溢价、或因子溢价factor premium

精确单因子套利定价

定理 14.1 如果资产收益由精确单因子模型（14.3）式描述，那么它们的风险溢价如下：

$$\bar{r}_n = r_F + b_n\lambda, \forall n$$

Arbitrage Pricing

- 14.5来自于无套利：套利定价
- 14.5与CAPM形式一样：若$f=a(\bar{r}_M-r_F)$

- 若14.5不满足：可套利
- 买入1元资产n，卖出b_n元因子组合、及1－b_n元无风险资产
- 卖出1元资产n，买入b_n元因子组合、及1－b_n元无风险资产

精确F因子模型

定理14.2 给定收益的F因子模型，无套利要求

$$\bar{r} = \lambda_0 \iota + \sum_{j=1}^{F} b_j \lambda_j \qquad (14.6)$$

其中b_j是b的第j列

证明：$z^T \iota = 0$：z称为套利组合（投资为0）

无套利要求若$z^T b = 0$（零因子风险），则$z^T \bar{r} = 0$

故$\bar{r}$与ι、b_j正交，可由ι、b_j线性表示

若有F+1个资产线性无关，则引理14.1-2成立

精确因子模型

- 任何资产可由因子组合复制
- 无套利 → 资产定价

- 一般因子模型：特异风险无法复制，企望由组合而分散、消除特异风险

14.3 极限套利与APT

定义 14.1 给定资产 $n=1,2,\cdots$，极限套利机会是一个有前 n 个资产构成的套利组合序列 $z^{(n)}$，使得当 $n\to\infty$ 时，

1． $z^{(n)^T}\bar{r}^{(n)}\to\delta>0$

2． $Var[z^{(n)^T}\tilde{r}^{(n)}]\to 0$

其中，$\tilde{r}^{(n)}$ 是组合中 n 项资产的收益向量，而 $\bar{r}^{(n)}$ 是它的均值。

极限套利和APT（续）

定理 14.3 如果资产收益由带有有界剩余风险的 F 因子模型描述，并且不存在极限套利机会，那么对于任意 n，存在 $\lambda_0^{(n)}$， $\lambda^{(n)}$ 和 A 使得

$$\sum_{i=1}^{n}(\overline{r}_i^{(n)} - \lambda_0^{(n)} - b_i^{(n)T}\lambda^{(n)})^2 \le A$$

其中， A 是与 n 无关的常数。

极限套利和APT（续）

定理14.4 极限无套利意味着存在λ_0和λ，使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\bar{r}_i-\lambda_0-b_i^T\lambda)^2<\infty$$

定理的含义

- 14.3 对任意资产数目n，可找到一个近似的定价关系，使总定价误差有界

- 14.4 极限无套利=总定价误差有限：对任意ε>0，定价误差>ε的资产数目是有限的（ATP只对少数资产不成立）

14.4 极限套利和均衡

- 无套利是均衡的必要条件，而极限无套利则不是一个均衡要求
- 极限无套利的条件实际上包含着对参与者偏好和/或资产支付的限制

14.5 作为均衡结果的APT

- 定理14.5 如果：

1. 证券支付具有如（14.7）式给出的因子结构，且其中有一个是无风险的；
2. 每个因子都可由证券支付线性表出；
3. 参与者的1期消费可由证券支付线性表出；
4. 1期的总禀赋可由因子线性表出；
5. 参与者是严格风险厌恶的，且
6. 均衡配置是内部解。

- 那么，APT定价关系（14.6）式在均衡下成立

APT小结

- 线性因子模型：一组系统、特异风险
- 风险因子是什么：未知！
- 无残余：无套利给出精确定价关系
- 有残余：极限无套利给出近似定价关系
- 实证问题：CAPM中系统即市场，易实证；ATP中系统风险未知，不易实证