资本资产定价模型（CAPM）

第13章

问题的提出

- M-V偏好下的组合选择（12章）
- 参与者选择MVE组合：
- 由两个MVF组合组成
- 两基金分选成立

- M-V偏好下的资产定价（本章）
- 求解典型参与者的问题
- CAPM：均衡的推论，与Sharpe不同

13.1 市场组合

市场组合：交易证券的总供给

证券n的发行量（股数）：$\bar{\theta}_n$ 价格：P_n

证券n的市值Market Cap：$\bar{\theta}_n P_n = v_n$

市场组合：$\theta_M \equiv [\bar{\theta}_1;\cdots;\bar{\theta}_N]$ 价格向量：$P = [P_1;\cdots;P_N]$

市场组合的总市值：$v_M = \sum v_n = \sum \bar{\theta}_n P_n = P^T \theta_M$

证券n的市值权重：$z_{M,n} = v_n / v_M$

市场组合：$z_M \equiv [z_{M,1};\cdots;z_{M,N}]$

13.2 市场均衡

- 定理13.1　在均值-方差偏好下，市场达到均衡时，市场组合就是切点组合

- 市场组合是MVE，可直接观察到
- 所有参与者最优：无风险证券+市场组合 → 市场指数基金
- 给出一个定价关系

定理10.1 证明

参与者k的财富w_k

持有切点组合z_T的量a_k，其中证券n的投资是$a_k z_{T,n}$

证券n的总投资即其市值： $$\sum_k (a_k z_{T,n}) = v_n = v_M z_{M,n}$$

参与者k持有无风险证券的量$w_k - a_k$

所有参与者持有的无风险证券的总量为零： $$\sum_k w_k = \sum_k a_k$$

总财富即总市值： $$\sum_k w_k = v_M = \sum_k a_k$$

$$\Rightarrow \quad z_{T,n} = z_{M,n}$$

13.3 CAPM给出的资产定价关系

定理 13.2 对于任意证券 n，

$$\overline{r}_n - r_F = \beta_{n,M}(\overline{r}_M - r_F)$$

其中，$\beta_{n,M} = \dfrac{Cov[\tilde{r}_n, \tilde{r}_M]}{Var(\tilde{r}_M)}$ 是证券 n 的市场 β 值。

CAPM

- 13.3是均衡下的定价关系
- 风险溢价与市场风险成正比
- 市场风险由Beta度量
- 风险的价格（单位风险的价格）：市场的风险溢价
- Security Market Line (SML):风险溢价 – Beta图

CAPM的经济意义

$$\tilde{r}_n - r_F = \alpha_n + \beta_n(\tilde{r}_M - r_F) + \tilde{\varepsilon}_n$$

其中$E[\tilde{\varepsilon}_n] = 0, \qquad Cov[\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{r}_M] = 0$

$\alpha_n = 0$:　CAPM要求其为零

β_n：与市场相关的风险Systematic

$\tilde{\varepsilon}_n$：与市场无关的风险（残余风险）Non-systematic

$$\sigma_n^2 = \beta_n^2 \sigma_M^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

$$E[\tilde{r}_n] - r_F = \beta_n(E[\tilde{r}_M] - r_F)$$

13.4 没有无风险资产的CAPM

定理13.3　对任意组合q，

$$\bar{r}_q - \bar{r}_{zcm} = \beta_q(\bar{r}_M - \bar{r}_{zcm})$$

其中，zcm是与市场组合协方差为0的MVF组合

13.5 作为均衡结果的CAPM

- M-V偏好的两个特例：

- 二次型效用函数

- 正态分布的Payoff

二次型效用函数

$$u_{k,1}(c_{k,1}) = \tfrac{a_k}{2}(c_{k,1} - \bar{c}_k)^2$$

一阶条件：$E[u'_{k,1}(\tilde{c}_{k,1})(\tilde{r}_q - r_F)] = a_k E[(\tilde{c}_{k,1} - \bar{c}_k)(\tilde{r}_q - r_F)] = 0$

$$E[(\tilde{C}_1 - \bar{C})(\tilde{r}_q - r_F)] = E[(\tilde{C}_1 - \bar{C}_1 + \bar{C}_1 - \bar{C})(\tilde{r}_q - \bar{r}_q + \bar{r}_q - r_F)]$$

$$= Cov[\tilde{C}_1, \tilde{r}_q] + (\bar{C}_1 - \bar{C})(\bar{r}_q - r_F) = 0$$

$$Cov[\tilde{C}_1, \tilde{r}_q] = Cov[v_M(1+\tilde{r}_M), \tilde{r}_q] = v_M Cov[\tilde{r}_M, \tilde{r}_q]$$

$$v_M Cov[\tilde{r}_M, \tilde{r}_q] = -(\bar{C}_1 - \bar{C})(\bar{r}_q - r_F)$$

取q为市场组合：$v_M \sigma_M^2 = -(\bar{C}_1 - \bar{C})(\bar{r}_M - r_F)$

CAPM：
$$\frac{Cov[\tilde{r}_M, \tilde{r}_q]}{\sigma_M^2} = \frac{\bar{r}_q - r_F}{\bar{r}_M - r_F}$$

正态分布的支付

- 假设：
  - 证券市场经济
  - 证券市场由无风险利率和N只风险证券构成
  - 无风险证券的总量为零
  - 风险证券的Payoff呈正态分布
  - 参与者在1期具有CARA效用函数

正态分布的支付（续）

$\tilde{v}$：风险证券的Payoff向量

0期投资：$w_k = e_{k,0} + S^T\theta_k - c_{k,0}$

1期消费：$\tilde{w}_k = (w_k - S^T\theta_k)(1+r_F) + \theta_k^T\tilde{v}$ （无风险＋风险）

$$= w_k(1+r_F) + \theta_k^T[\tilde{v} - (1+r_F)S]$$

$Var[\tilde{w}_k] = E[\theta_k^T\tilde{v} - \theta_k^T\bar{v}]^2 = \theta_k^T\Sigma\theta_k$

CARA： $E[-e^{-a_k\tilde{w}_k}] = -e^{-a_k\bar{w}_k + 0.5a_k^2 Var[\tilde{w}_k]}$

一阶条件： $-a_k[\bar{v} - (1+r_F)S] + a_k^2\Sigma\theta_k = 0$

$\theta_k = \dfrac{\Sigma^{-1}}{a_k}[\bar{v} - (1+r_F)S]$ （两基金货币分选）

正态分布的支付（续）

市场清solve：$\theta_M = \sum_k \theta_k = \sum_k \frac{\Sigma^{-1}}{a_k}[\bar{v} - (1+r_F)S]$

均衡价格向量：$\bar{v} - S(1+r_F) = a\Sigma\theta_M$ $\qquad \frac{1}{a} = \sum_k \frac{1}{a_k}$

$\bar{r}_n - r_F = (a/S_n)(\Sigma\theta_M)_n,$ $\qquad \bar{v}_n/S_n - 1 = \bar{r}_n$

$= (a/S_n)(E[(\tilde{v} - \bar{v})(\tilde{v} - \bar{v})^T\theta_M])_n$

$= (a/S_n)E[(\tilde{v}_n - \bar{v}_n)(\tilde{v}^T\theta_M - \bar{v}^T\theta_M)]$

$= aw_M E[(\tilde{r}_n - \bar{r}_n)(\tilde{r}_M - \bar{r}_M)]$ $\qquad \tilde{v}^T\theta_M = \tilde{w}_M$

$= aw_M Cov[\tilde{r}_n, \tilde{r}_M]$

价格向量乘以市场组合：$\theta_M^T\bar{v} - \theta_M^T S(1+r_F) = a\theta_M^T\Sigma\theta_M$

$\bar{r}_M - r_F = (a/w_M)E[\theta_M^T(\tilde{v} - \bar{v})(\tilde{v} - \bar{v})^T\theta_M]$

$= (a/w_M)w_M^2 E[(\tilde{r}_M - \bar{r}_M)(\tilde{r}_M - \bar{r}_M)]$

$= aw_M Var[\tilde{r}_M]$