在均值-方差偏好下的投资组合选择

第12章

组合选择

- 前四章（8-11）：一般偏好、收益分布下的组合选择的一般结论，揭示一些经济原理，尚不具有可操作性

- 本章：Markowitz, Portfolio Theory
- 内容：与Merton，1972相近；证券市场经济，市场化的1期禀赋
- 偏好只与未来收益分布的均值、方差有关

12.1 均值-方差偏好

设$\overline{w} = E[\tilde{w}], \sigma^2 = E(\tilde{w} - \overline{w})^2$：

$$u(\tilde{w}) = u(\overline{w}) + u'(\overline{w})(\tilde{w} - \overline{w}) + \tfrac{1}{2}u''(\overline{w})(\tilde{w} - \overline{w})^2 + \cdots$$

$$E[u(\tilde{w})] = u(\overline{w}) + \tfrac{1}{2}u''(\overline{w})\sigma^2 + \cdots$$

$$E[u(\tilde{w})] = v(\overline{w}, \sigma) \qquad (12.1)$$

mean - variance preference : big mean, tiny variance

均值-方差偏好（续）

定理 12.1 如果 $u(\bullet)$ 是二次的，那么 $E[u(\tilde{w})] = v(\bar{w}, \sigma_w)$。

定理 12.2 如果证券的支付是联合正态分布的，那么参与者的偏好具有均值-方差表述，$E[u(\tilde{w})] = v(\bar{w}, \sigma_w)$。

均值-方差偏好（续）

定理 12.3 如果证券支付是联合正态分布的，并且$u'(\bullet)>0$，以及$u''(\bullet)<0$，那么均值-方差效用函数$v(\bar{w},\sigma_w)$具有如下性质：

$(1)\partial_1 v<0;(2)\partial_2 v<0;(3)\partial^2{}_{11}v<0;(4)\partial^2{}_{22}v<0;(5)v(\bar{w},\sigma_w)$是凹的。

变量定义

证券收益率：$\tilde{r} = [\tilde{r}_1; \cdots; \tilde{r}_N]$

均值向量：$\bar{r} = E[\tilde{r}]$　　协方差矩阵：$\Sigma = E[(\tilde{r} - \bar{r})(\tilde{r} - \bar{r})^T]$

组合权重：$z = [z_1; \cdots; z_N]$　　组合收益率：$\tilde{r}_z = z^T \tilde{r}$

组合均值：$\bar{r}_z = E[\tilde{r}_z] = E[z^T \tilde{r}] = z^T \bar{r}$

组合方差：$\sigma_z^2 = E[\tilde{r}_z - \bar{r}_z]^2 = E[z^T(\tilde{r} - \bar{r})]^2 = z^T \Sigma z$

1期的收支：$\tilde{w} = w(1 + \tilde{r}_z)$

$E[\tilde{w}] = w(1 + \bar{r}_z)$　　$Var[\tilde{w}] = w^2 \sigma_z^2$

均值-方差组合优化问题

$$\min_{z} \quad \tfrac{1}{2} z^T \Sigma z \qquad (12.2)$$

$$s.t. \quad z^T \bar{r} = r_p \qquad z^T I = 1$$

(12.2)的解：mean - variance frontier portfolio

假设N只风险证券线性独立，则Σ是正定的

一阶条件：$\Sigma z = \lambda_r \bar{r} + \lambda_1 I$

$$z = \lambda_r \Sigma^{-1} \bar{r} + \lambda_1 \Sigma^{-1} I \qquad (12.3)$$

把z代入约束条件，可解得$\lambda_r(r_p)$、$\lambda_1(r_p)$

(12.3)给出MVF

均值-方差前沿组合

- 定理12.4 任何一个有均值-方差偏好的参与者的最优组合是一个MVF组合

两个特殊组合

$$r_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{r}^{\mathrm{T}} z_0 = 0$$

$$r_p = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{r}^{\mathrm{T}} z_1 = 1$$

$$z = (1 - r_p) z_0 + r_p z_1 \qquad (12.4)$$

z是任意组合，因为：

$$\bar{r}^{\mathrm{T}} z = (1 - r_p) \bar{r}^{\mathrm{T}} z_0 + r_p \bar{r}^{\mathrm{T}} z_1 = r_p$$

12.3 均值-方差前沿组合的性质

- 定理12.5 任意MVF组合可由z_0、 z_1两个MVF组合组合而成
- 推理12.1 MVF可由任意两个MVF组合而成
- 推理12.2 MVF组合的任意组合也是MVF组合

- 定理12.6 M-V偏好下两基金分选成立
- 定理12.7 MVF组合位于R^N中的一直线上

均值-方差有效组合

一阶条件：$\Sigma z = \lambda_r \bar{r} + \lambda_1 I$

$$\sigma_{\mathrm{p}}^2 = \lambda_r r_p + \lambda_1$$

$$= \frac{1}{bc-a^2}(cr_p^2 - 2ar_p + b)$$

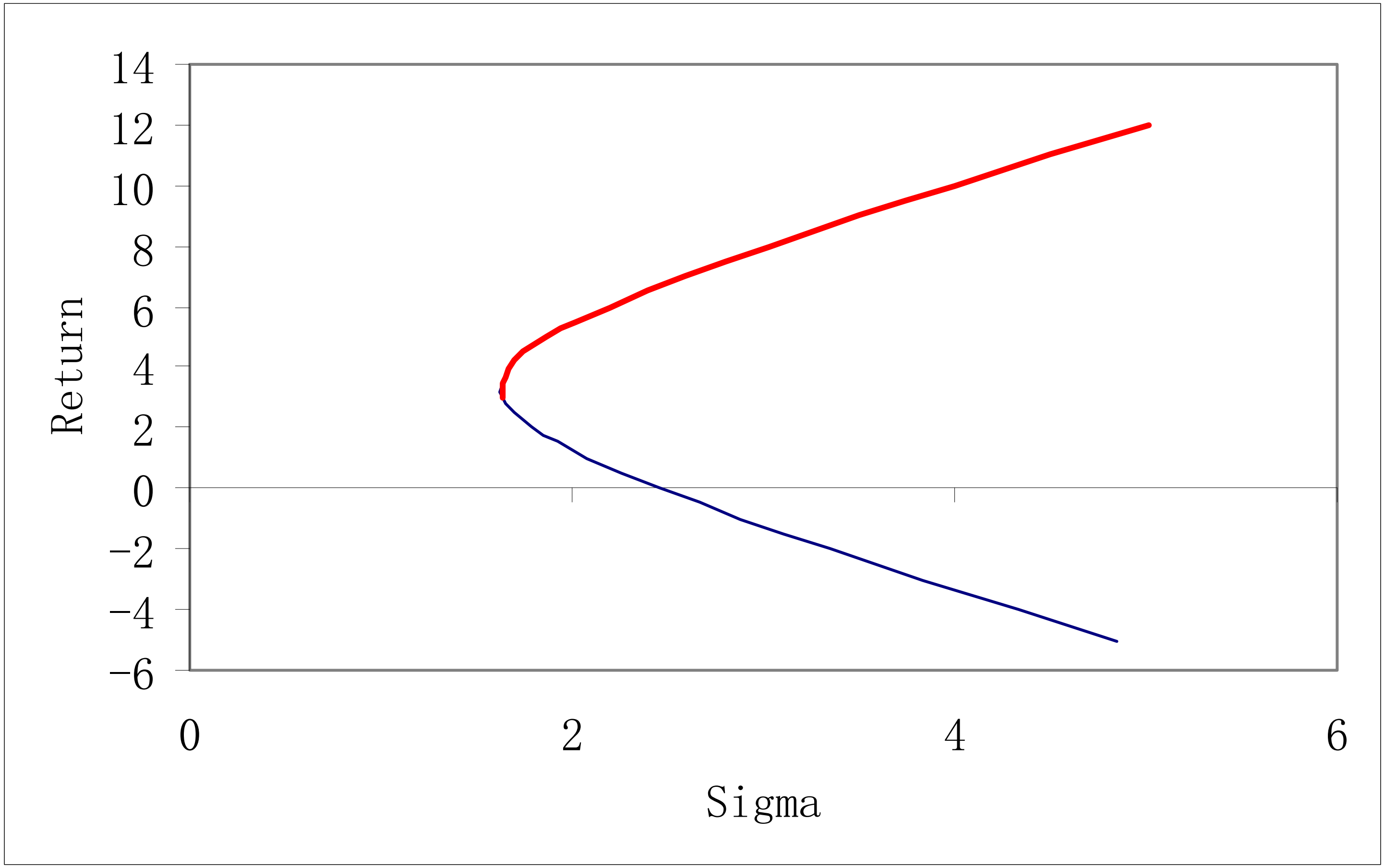
其中a、b、c由$\tilde{r}$、$\bar{r}$决定

r_p - σ_p构成一双曲线

双曲线的上半部分：mean - variance efficient (MVE)组合

minimum variance portfolio (MVP) : $\dfrac{\partial \sigma_{\mathrm{p}}^2}{\partial r_p} = 0$

MVE组合、MVP



MVP的性质

定理 12.8 对于任意组合 p，$Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}] = \sigma_{mvp}^2$。

定理 12.9 对于任意 MVF 组合 $p(\neq MVP)$，存在一个 MVF 组合 zcp 使得 $Cov[\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zcp}] = 0$。

MVF组合的性质

定理 12.10 令 p 为一 MVF 组合，对于任意组合 q，有

$$\bar{r}_q - \tilde{r}_{zcp} = \beta_{p,q}(\bar{r}_p - \tilde{r}_{zcp})$$

其中 $\beta_{p,q} \equiv \dfrac{Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{\sigma_p^2}$ 是组合 q 对应于组合 p 的 β 值，而 zcp 是与组合 p 的协方差为 0 的 MVF 组合。

定理12.10 证明

组合p一阶条件：$\Sigma z_p = \lambda_r \bar{r} + \lambda_1 I$

$$z_q^T \Sigma z_p = \lambda_r z_q^T \bar{r} + \lambda_1 = \lambda_r r_q + \lambda_1 = Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]$$

如果q是zcp：$\lambda_1 = -\lambda_r r_{zcp}$

如果q是p：$\sigma_{\mathrm{p}}^2 = \lambda_r r_p + \lambda_1 = \lambda_r (r_p - r_{zcp})$

$$Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p] = \lambda_r (r_q - r_{zcp}) = \frac{\sigma_{\mathrm{p}}^2}{r_p - r_{zcp}} (r_q - r_{zcp})$$

$$r_q - r_{zcp} = \frac{Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{\sigma_{\mathrm{p}}^2} (r_p - r_{zcp}) = \beta (r_p - r_{zcp}) \qquad \text{(CAPM!)}$$

12.4 存在无风险资产的情形

风险证券超额收益向量：$\tilde{\eta} = \tilde{r} - r_F I$

风险证券组合权重：z　　无风险证券权重：　$1 - z^T I$

$\tilde{w} = w(1 + r_F + z^T \tilde{\eta})$

优化问题：$\min\limits_{z} \ \frac{1}{2} z^T \Sigma z$

$s.t. \quad z^T \overline{\eta} = \eta_p = r_p - r_F$

一阶条件：$\Sigma z = \lambda \overline{\eta}$

MVF组合：$z_p = \dfrac{\eta_p}{\overline{\eta}^T \Sigma^{-1} \overline{\eta}} \Sigma^{-1} \overline{\eta} = \dfrac{\eta_p}{\eta_T} z_T = (I^T z_p) z_T$　　（12.7）

tangent组合：$\eta_T = \dfrac{\overline{\eta}^T \Sigma^{-1} \overline{\eta}}{I^T \Sigma^{-1} \overline{\eta}}$　　$z_T = \dfrac{1}{I^T \Sigma^{-1} \overline{\eta}} \Sigma^{-1} \overline{\eta}$　　$I^T z_T = 1$

存在无风险资产的MVF

- 定理12.11 当存在无风险证券时，MVF可由无风险证券和切点组合组合而成

Sharpe比

风险证券总权重：$z^T I = a$

无风险证券权重： $1-a$

风险证券组合： $q = \frac{1}{a} z \qquad q^T I = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 - z^T I \\ z \end{bmatrix} = (1-a)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 \\ q \end{bmatrix}$$

左：一个无风险证券及N个风险证券的组合

右：一个无风险证券，加上一个风险证券的组合q

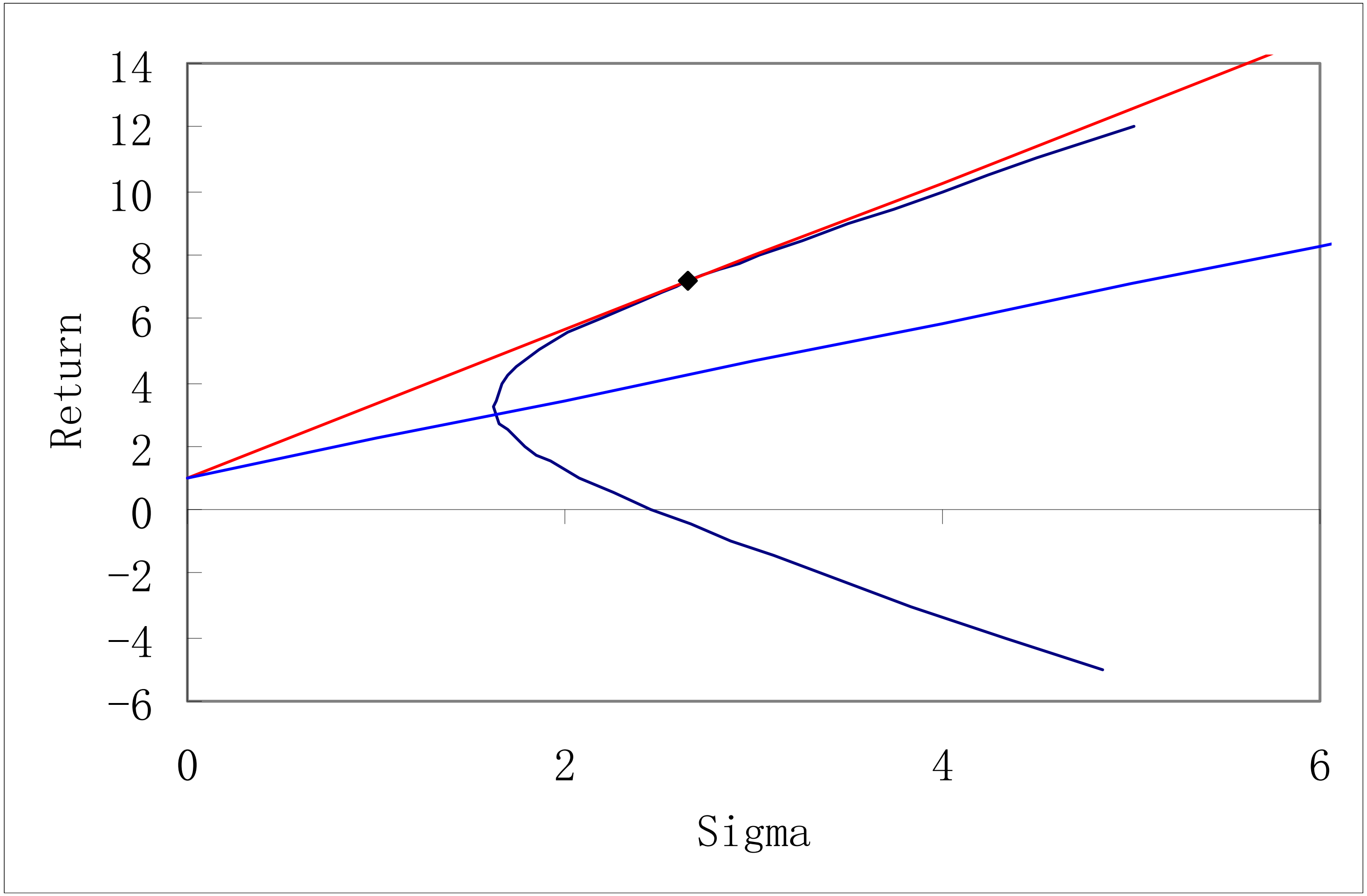
$$\text{Sharpe比} = \frac{\bar{r}_q - r_F}{\sigma_q}$$ （单位风险溢价）

资本市场线

- 切点组合：过无风险收益的直线与风险证券组合MVF双曲线的切点
- 切点组合的Sharpe比最大
- CML: capital market line。CML给出所有M-V偏好参与者的最优组合

- 定理12.12 当$r_F < r_{MVP}$时，切点组合是MVE组合

切点组合、CML、Sharpe比



风险证券与切点组合

定理 12.13 存在无风险证券时，如果 p 是一个 MVE 组合，那么对于任意组合 q 有

$$\bar{r}_q - r_F = \beta_{q,p}(\bar{r}_p - r_F), \beta_{q,p} = \frac{Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{Var(\tilde{r}_p)}$$

定理12.13 证明

MVE组合p一阶条件：$\Sigma z_p = \lambda \overline{\eta}$

$$z_q^T \Sigma z_p = \lambda z_q^T \overline{\eta} = \lambda(\overline{r}_q - r_F) = Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]$$

如果q是p：$\sigma_{\mathrm{p}}^2 = \lambda(\overline{r}_p - r_F)$

$$Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p] = \frac{\sigma_{\mathrm{p}}^2}{\overline{r}_p - r_F}(\overline{r}_q - r_F)$$

$$\overline{r}_q - r_F = \frac{Cov[\tilde{r}_q, \tilde{r}_p]}{\sigma_{\mathrm{p}}^2}(\overline{r}_p - r_F) = \beta(\overline{r}_p - r_F) \qquad \text{(CAPM!)}$$

Beta

- 在M-V偏好下，只持有MVE即CML上的组合
- 风险由相对于切点组合的Beta度量
- 风险溢价与Beta成正比