完备市场中的
资源配置与资产价格

第10章

内容

- 最优组合选择（前一章）→ 价格
- 期望效用下的市场均衡、资源配置（第3章的具体化）
- 个体风险的消化、总体风险的分担
- 典型参与者：问题简化
- 基于消费的定价模型

10.1 完备市场的均衡

- 定理10.1 当市场完备时，均衡配置、状态价格与具有相同财富分布的Arrow-Debreu经济中的一样，而与实际的市场结构以及参与者的禀赋在时间和状态上的分布无关

- 禀赋是可市场化的

AD市场均衡（第3章）

Arrow-Debreu 经济的均衡是使如下条件成立的状态价格集合$\{\phi_\omega, \omega \in \Omega\}$

1．给定状态价格，每一参与者达到最优化：

$$c_k(e_k, \phi) = \operatorname{Arg\,max} U_k(c_k)$$

$s.t.$

$$(1) c_{k,0} + \phi^T c_{k,1} = e_{k,0} + \phi^T e_{k,1}$$

$$(2) c_k \geq 0$$

2．证券市场出清：

$$\sum_k c_{k,0}(e_k, \phi) = \sum_k e_{k,0}$$

$$\sum_k c_{k,1}(e_k, \phi) = \sum_k e_{k,1}$$

期望效用与市场均衡

$$(10.1): \max_{c_{k,0}+\phi^T c_{k,1}=w_k} u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_{\omega} p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega})$$

$$(10.3): \phi_\omega = \frac{p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{u'_{k,0}(c_{k,0})}, \frac{\phi_\omega}{\phi_{\varpi}} = \frac{p_\omega u'_{k,1}(c_{k,1\omega})}{p_{\varpi} u'_{k,1}(c_{k,1\varpi})}$$

$$(10.4): c_{k,0} = u'^{-1}_{k,0}(\lambda_k), c_{k,1\omega} = u'^{-1}_{k,1}(\lambda_k \phi_\omega / p_\omega)$$ （对严格凹函数u）

预算约束决定λ_k。(10.4)给出优化问题(10.1)的解

状态价格密度state price density： ϕ_ω / p_ω

最优消费/投资选择的性质

定理10.2

完备市场中，参与者具有（6.3）式形式的递增且严格凹的效用函数u。$\forall k$及$\omega,\overline{\omega}\in\Omega, c_{k,1\omega}<c_{k,1\overline{\omega}}$当且仅当 $\phi_{\omega}/p_{\omega}>\phi_{\overline{\omega}}/p_{\overline{\omega}}$

完全市场的均衡（续）

- 定理10.3 均衡存在且唯一

1. 参与者各自优化
2. 市场出清，解得均衡、状态价格，同时对证券定价(Ex 10.1, Page 146)

- 完备市场均衡配置为Pareto最优（第一福利经济学定理）

最优配置的标准

定理 10.4 配置 $\{c_k\}$ 是 Pareto 最优的，如果存在一组权重 $\mu_k > 0 (k=1,\cdots,K)$，使得 $\{c_k\}$ 是下面问题的解：

$$\max_{\{c_k,\forall k\}} \sum_k \mu_k \left[u_{k,0}(c_{k,0}) + \sum_k p_\omega u_{k,1}(c_{k,1\omega}) \right]$$

$$s.t.$$

$$\sum_k c_k = \sum_k e_k \equiv C = [C_0; C_1]$$

其中，C_t 为 $t=0,1$ 期的总消费。

最优性（续）

- 定理10.4的优化：对所有参与者的加权效用进行优化（中央决策问题）
- 定理10.4优化的一阶条件，是Pareto最优的充要条件：所有参与者相对于其0期的边际效用相等

最优性（续）

- 定理10.5 对于定义2.5中描述的经济，任何一个Pareto最优配置都可以由完备证券市场下，相对于财富在参与者之间的某个配置的市场均衡来达到

- 第二福利经济学定理Second Theorem of Welfare Economics

最优分享规则

$$C_{1\omega} = \sum_k c_{k,1\omega} = \sum_k u_{k,1}'^{-1}(\bar{\phi}_\omega / \mu_k) \quad (\bar{\phi}_\omega : \text{Lagrangian multiplier})$$

$\Rightarrow \quad \bar{\phi}_\omega = g(C_{1\omega}; \mu)$ 是C的单调函数且与ω无关

$\Rightarrow \quad c_{k,1\omega} = f_{k,1}(C_{1\omega}; \mu) \quad \forall k$

函数集$\{f_{k,t}\}$为最优分享规则

风险分担

定理 10.6 如果 $C_{1\omega} > C_{1\omega'}$，对所有的 k 都有 $c_{k,1\omega} > c_{k,1\omega'}$。

- 最优分享规则：总消费与参与者消费的关系
- 每个参与者的消费只与总禀赋有关，总禀赋较高的状态下所有参与者的消费较多
- 总禀赋的风险是均衡时参与者承担的唯一风险
- 完备市场风险分担最优
- 证券价格只与总风险aggregate risk有关，与个体风险individual risk无关

线性分享规则

定理 10.7 当且仅当

$$\forall k: u'_{k,1}(c) = \rho_k (d_k + \frac{c}{\gamma})^{-\gamma}$$

时，线性分担原则成立。其中 $\rho_k > 0$，且 $\gamma \geq -1$。

- 线性分享规则的条件要求所有参与者的效用函数都是HARA类且具有相同的指数 γ

10.3 典型参与者

- 中央决策者关注总消费的效用
- representative agent：具有如下期望效用函数（10.13）的假想参与者：

$$u_0(C_0)+\sum_{\omega} p_\omega u_1(C_{1\omega})$$

典型参与者

- 定理10.8 如果所有参与者都具有递增且严格凹性的效用函数，由（10.13）式中所定义的典型参与者的效用函数也是递增且严格凹性的

- 典型参与者的禀赋是经济的总禀赋
- 市场完备时，只有唯一一个典型参与者的市场与有多个参与者的市场，具有相同的均衡价格
- 只需确定典型参与者的总禀赋及效用函数，即可对资产进行定价(Ex 10.2, Page 154)

10.4 聚集

- 典型参与者的效用函数不容易确定

- 典型参与者与个体参与者的效用函数形式相同，称存在聚集aggregation

- 存在聚集，不需要求解均衡即可得到均衡价格

聚集

定理 10.9 如果经济中的参与者都具有如下的效用函数：

$$u_k(c) = \frac{1}{1-\gamma}(d_k + c)^{1-\gamma}$$

其中，$\gamma > 0$，那么代表性参与者的效用函数具有相同的形式：

$$u(C) = \frac{1}{1-\gamma}(d + C)^{1-\gamma}$$

且与财富在参与者之间的分布无关。

基于消费的资产定价CCAPM

典型参与者： $\phi_\omega = \dfrac{p_\omega u_1'(C_{1\omega})}{u_0'(C_0)}$

状态价格密度： $\pi_\omega = \phi_\omega / p_\omega$

资产价格(10.16)： $S_j = \sum_\omega \phi_\omega x_{j\omega} = \sum_\omega p_\omega \pi_\omega x_{j\omega} = E[\tilde{\pi}\tilde{x}_j]$

债券： $B = E[\tilde{\pi} \times 1] = \dfrac{1}{1+r_F}$

风险证券：

$$S_j = E[\tilde{\pi}]E[\tilde{x}_j] + \text{cov}[\tilde{\pi}, \tilde{x}_j]$$

$$= \frac{E[\tilde{x}_j]}{1+r_F} + \text{cov}[\tilde{\pi}, \tilde{x}_j]$$

资产定价特征

- 若风险与状态价格密度（相对边际效用）不相关：期望收支折现即价格（特异风险idiosyncratic不影响价格）
- 总aggregate风险：相对边际效用反映的风险。定价与总体风险有关。

资产定价与总体风险

- 负相关：证券在资源稀缺时收支较低，价格较低

- 正相关：证券在资源稀缺时收支较高（保险），价格较高

- CCAPM可用收益率来表示

基于消费的真实利率理论

假设$\tilde{g}$为小量：　$\tilde{C}_1 = C_0(1+\tilde{g}),\quad u_0 = u,\quad u_1 = \rho u$

状态价格密度：　$\tilde{\pi} = \dfrac{\rho u'(\tilde{C}_1)}{u'(C_0)} = \rho[1 + \dfrac{C_0 u''(C_0)}{u'(C_0)}\tilde{g}]$

债券：　$B = E[\tilde{\pi} \times 1] = \rho(1 - RE[\tilde{g}]) = \dfrac{1}{1+r_F}$

$$1 + r_F = \frac{1}{\rho}(1 + RE[\tilde{g}])$$

风险的测度及其溢价

风险证券： $E[\tilde{r}_j]-r_F \approx (1+RE[\tilde{g}])RCov[\tilde{g},\tilde{r}_j]$ (10.21,10.23)

经济在1期的总消费由市场组合决定：$S_M=\phi^T C_1$

市场的收益率：$\tilde{r}_M=\dfrac{\tilde{C}_1-S_M}{S_M}=\dfrac{C_0(1+\tilde{g})-S_M}{S_M}$

$$\tilde{g}=\frac{S_M}{C_0}(1+\tilde{r}_M)-1$$

$$E[\tilde{r}_j]-r_F=(1+RE[\tilde{g}])R\frac{S_M}{C_0}Cov[\tilde{r}_M,\tilde{r}_j]$$

取$\tilde{r}_j=\tilde{r}_M$，得：$E[\tilde{r}_M]-r_F=(1+RE[\tilde{g}])R\dfrac{S_M}{C_0}\sigma_M^2$

$$E[\tilde{r}_j]-r_F=\frac{Cov[\tilde{r}_M,\tilde{r}_j]}{\sigma_M^2}(E[\tilde{r}_M]-r_F)$$ CAPM!